1. Лампочки

**Условие.**

Иван Владимирович сдаёт квартиру Петру Алексеевичу. По условиям договора, перегоревшие лампочки заменяет Иван Владимирович за свой счёт, а за электроэнергию платит Пётр Алексеевич. В месяц у Петра Алексеевича одна лампа светит в среднем 180 часов, стоимость электроэнергии составляет рублей за один киловатт-час. Исходя из следующих данных, определите, какие лампочки выгодны каждому из них.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Параметр** | **Лампа накаливания** | **Газоразрядная энерго-сберегающая лампа** | **Светодиодная лампа (LED)** |
| Световой поток, люмен | 810 | 810 | 810 |
| Мощность лампы, Вт | 85 | 35 | 9 |
| Средний срок службы, часов | 1 000  | 6 000  | 20 000  |
| Цена (рублей за штуку) | 55 | 215 | 410 |

**Ответ:** светодиодные лампы наиболее выгодны всем.

2. Стоимость страхового полиса.

Страховая компания M предлагает владельцам автомобилей страхование по риску «Ущерб в ДТП».  Аналитики компании провели исследования и сделали оценки вероятностей попадания автомобиля в ДТП в течение года и средних страховых выплат для следующих страховых случаев:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Страховой случай** | Легкий ущерб | Тяжёлый ущерб | Полное уничтожение  |
| **Вероятность** | 0,11 | 0,038 | 0,002 |
| **Средняя выплата (руб.)** | 35000 | 150000 | 650000 |

Из-за конкуренции в страховом бизнесе компания М хочет установить наименьшую цену страхового полиса, при которой средняя прибыль от продажи одного страхового полиса будет 500 рублей. Найдите эту цену.

**Краткое решение**. Обозначим цену полиса . Распределение случайной величины  «прибыль от продажи полиса» выглядит так:



Математическое ожидание прибыли от продажи одного полиса должно быть не меньше 500 рублей. Составим уравнение

,

откуда

; .

**Ответ**: 11350 руб.

3. Бонусная программа авиакомпании

Андрей – предприниматель из Самары. В прошлом году он начал новый бизнес-проект, и ему нужно постоянно жить в Москве. Семья Андрея осталась в Самаре, и он приезжает домой один-два раза в месяц. Андрей предпочитает самолёт всем прочим видам транспорта. Он участвует в программе лояльности крупной российской авиакомпании, по условиям которой за полёты начисляются баллы. Эти баллы впоследствии можно потратить на бонусный полёт (требуемое количество баллов различно для разных направлений). Баллы за бонусный перелёт не начисляются. С прошлого года на бонусном счету Андрея осталось 6000 баллов, и Андрей хочет как можно эффективнее использовать накопленные баллы, максимально снизив затраты на приобретение билетов. Андрей составил перечень запланированных на этот год перелётов. Изучив таблицу, определите, сколько билетов и по каким маршрутам Андрею лучше оформить за счёт баллов? Сколько при этом составят совокупные расходы на приобретение билетов?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Направление | Количество полётов в одну сторону (туда или обратно) | Ценабилета | Начисление баллов за полёт | Списание баллов за бонусный билет |
| Новосибирск | 4 | 7000 | 1736 | 15000 |
| Сочи | 6 | 6000 | 851 | 12500 |
| Санкт-Петербург | 8 | 2500 | 500 | 10000 |
| Самара | 30 | 3000 | 521 | 10000 |
| Калининград | 6 | 5000 | 673 | 10000 |

**Ответ:** 186 тысяч рублей.

4. Лотерея кота Базилио

**Условие**. Кот Базилио устроил лотерею. Лотерейный билет стоит 1 сольдо, и на каждом билете напечатаны буквы слова БУРАТИНО в случайном порядке, каждая два раза: всего шестнадцать букв. Каждая буква скрыта под непрозрачной краской. Участник лотереи должен стереть краску ровно с восьми букв. Если из восьми открытых букв можно сложить слово БУРАТИНО, то участник выигрывает билет на премьеру в театр Карабаса. Если же каких-то букв не хватает, то участник не получает ничего. Порядок букв в каждом лотерейном билете случаен и не зависит от других билетов. Билеты выигравшим участникам Базилио оплачивает из собранных средств: каждый билет стоит 10 сольдо. Всего было выпущено 10000 лотерейных билетов, и все они были раскуплены. Найдите математическое ожидание прибыли Базилио от распространения лотерейных билетов.

**Краткое решение**. Пусть  – прибыль, а  – число выигравших участников. Тогда

.

Перейдём к математическому ожиданию:



где  – вероятность, что участник правильно откроет все буквы. Получаем:

 сольдо.

**Ответ**: 8011сольдо.

5. Стоимость колодца

Фирма «Крот» специализируется на устройстве колодцев глубиной до 20 метров. Затраты на копание одного метра колодца составляют 4 500 рублей за первый метр и увеличиваются на 240 рублей за каждый следующий метр. Владелец фирмы «Крот» установил следующие цены: каждый метр глубины колодца от 1го до 10го стоит 6000 руб, а от 11го до 20го 7000 руб.

|  |  |
| --- | --- |
| Глубина колодца, м | Цена за копание колодца |
| 1–10 | 6 000 руб. за метр |
| 11–20 | 60 000 руб. плюс 7 000 руб. за каждый метр, начиная с 11-го |

При этом глубина колодца всегда округляется до целого количества метров в большую сторону.

а) Может ли случиться, что цена устройства колодца окажется меньше затрат фирмы?

б) При какой глубине колодца прибыль фирмы «Крот» (разница между ценой и затратами) наибольшая?

**Решение.**

а) Затраты на копание колодца глубиной  метров составят  руб.

Если , то прибыль составит

 

Поскольку , при  копать колодцы глубиной  метров фирме выгодно.

Если , то прибыль равна

 рублей.

Решая неравенство  при условии , получаем, что при  копать колодцы также выгодно, а при  прибыль оказывается отрицательной.

2) При  выражение  принимает наибольшее значение 5460 при, а при  наибольшее значение выражения  равно 4300 при .

Ответ: а) да, при глубине в 17 метров и более; б) 7 метров.

6. Две хозяйки

**Условие**.

Цена молока на рынке колеблется, но известно, что в прошлом месяце оно стоило в среднем 60 рублей за литр. Две хозяйки покупали молоко; первая всегда покупала ровно один литр в день, вторая покупала каждый день молока ровно на 60 рублей. Кто из них купил больше молока в прошлом месяце?

**Решение.** Пусть вторая хозяйка покупала  л молока в -й день по цене  рублей за литр на протяжении всего месяца (будем считать, что , где  – число дней месяца). Поскольку она платила каждый раз ровно 60 рублей, для всех  верно равенство , откуда .

.

К величинам  применим неравенство между средним гармоническим и средним арифметическим. Получаем:

,

причём равенство выполняется, только если все  равны между собой, что противоречит условию. Следовательно, верно строгое неравенство

.

Поэтому

,

то есть вторая хозяйка купила больше чем  литров молока, тогда как первая купила ровно  литров.

**Примечание**. Все проведённые выкладки можно заменить естественным рассуждением. Вторая хозяйка покупала молока больше, чем первая в те дни, когда молоко стоило дешевле 60 р. за литр, а первая покупала молока больше, чем вторая в те дни, когда молоко стоило дороже 60 р. Обе хозяйки потратили одинаковое количество денег, поэтому вторая хозяйка купила дешёвого молока больше, чем первая дорогого.

**Ответ**: вторая хозяйка.