Глава XII. Числовые характеристики случайных величин

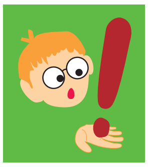
Как мы знаем, распределение вероятностей случайной величины — это таблица, в которой указаны значения случайной величины и их вероятности. Для практики не всегда нужно изучать всю таблицу распределения. Достаточно знать некоторые ее числовые характеристики. Мы расскажем о двух наиболее важных из них. Это ***математическое ожидание*** и ***дисперсия***.

53. Математическое ожидание случайной величины

Рассмотрим случайную величину X. Ее математическое ожидание обычно обозначают $\mathrm{E}(X)$.

Пусть распределение вероятностей случайной величины X задано таблицей:

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n



Определение. ***Математическим ожиданием*** случайной величины X называют число

$$\mathrm{E}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_n p_n.$$

Математическое ожидание $\mathrm{E}(X)$ называют также ***ожидаемым значением*** случайной величины X, ***средним значением*** случайной величины X.

Если значения случайной величины измеряются в каких-либо единицах (например, рост — в сантиметрах, температура — в градусах), то ее математическое ожидание измеряется в этих же единицах (средний рост — в сантиметрах, средняя температура — в градусах).

Пример. Возьмем в качестве случайной величины X число очков, выпавших на одной игральной кости. Вероятности выпадения каждой грани одинаковы и равны $\frac{1}{6}$.

Поэтому

$$\mathrm{E}(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Этот пример показывает, что если все значения случайной величины равновероятны, то **математическое ожидание — это просто среднее арифметическое значений.**

Коротко расскажем о применениях математического ожидания при расчете цены лотерейного билета и стоимости страхового полиса.

Лотерея

Для проведения лотереи изготовили 100 билетов. Из них 1 билет с выигрышем в 500 р., 10 билетов с выигрышами по 100 р. и остальные 89 билетов без выигрышей. Наудачу выбирают один билет. Найдем математическое ожидание выигрыша.

Эта случайная величина может принимать три значения: 500 р., 100 р. и 0 р. (нет выигрыша). Их вероятности равны 0,01, 0,10 и 0,89.

Математическое ожидание выигрыша равно

$$500 \cdot 0{,}01 + 100 \cdot 0{,}10 + 0 \cdot 0{,}89 = 15 \text{ (р.)}.$$

Получается, что средний выигрыш на один билет равен 15 р.

Для того чтобы лотерея приносила доход своим устроителям, цена билета должна быть больше, чем средний выигрыш. Предположим, что билет стоит 20 р. Продав все билеты, устроители лотереи получат 2000 рублей. На выплату выигрышей будет потрачено 1500 рублей. Таким образом, доход от лотереи составит 500 рублей.

Разумеется, может случиться так, что на один купленный нами билет мы получим большой выигрыш. Но если бы некто решил купить все билеты, то он достоверно потерял бы 500 рублей — по 5 на каждый из 100 билетов.

Так устроены все лотереи: математическое ожидание выигрыша на один билет меньше цены этого билета.

Это условие является непременным, и оно обеспечивает рентабельность лотереи и доход ее устроителям. **Человек, который решил сыграть в лотерею, должен понимать это и сознательно рисковать своими деньгами.**

Чем больше математическое ожидание выигрыша, тем больше игр требуется, чтобы устроитель лотереи получил ощутимый доход. Чем меньше математическое ожидание, тем меньше людей привлечет такая игра. Поэтому организаторы лотерей экспериментальным путем определяют наиболее выгодные условия лотереи, придумывают разнообразную рекламу и часто стараются сделать так, чтобы оценить ожидание выигрыша было невозможно.

Это не значит, что игрок не может выиграть. Иногда игроки выигрывают, и даже крупные суммы, но в конечном итоге устроитель лотереи всегда имеет доход. Когда игроков много, одни выигрывают, другие проигрывают, деньги перераспределяются между ними, и при этом бóльшая часть этих денег достается организатору лотереи.

Если часть средств, вырученных от лотереи, идет на нужды культуры, спорта, на содержание больниц и другие благородные цели, то такие лотереи называются благотворительными. В отделениях Сберегательного банка России можно приобрести билеты самых разных благотворительных лотерей.

На любую лотерею и на любой игральный автомат требуется специальное разрешение (лицензия). Если кто-то устраивает игру на деньги или вещи без лицензии, то это нарушение закона, а сам хозяин такой лотереи, скорее всего, мошенник. В такие игры играть нельзя!

Стоимость полиса обязательного страхования автомобильной гражданской ответственности (ОСАГО)

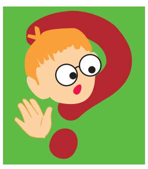
Полисы ОСАГО, которые должны иметь все владельцы автомобилей, продают страховые компании. Представляя автовладельцу полис, страховая компания берет на себя обязательство возместить ущерб, который этот автовладелец нанесет окружающим в случае дорожно-транспортного происшествия.

Стоимость полиса и пределы выплат были предметом обсуждений в Государственной Думе.

Чтобы определить стоимость полиса, нужно знать две величины: вероятность, с которой в течение года автовладелец может причинить окружающим ущерб в результате дорожного происшествия, и среднюю сумму ущерба. Произведение этих величин дает средний размер страховой выплаты страховой компании на один застрахованный автомобиль.

Для каждого отдельного автомобиля эта выплата является случайной величиной. Математическое ожидание страховой выплаты вместе с прибылью компании и составляет обоснованную стоимость страхового полиса.

В этом пункте мы познакомились со средним значением случайной величины — математическим ожиданием. Еще мы узнали, что математическое ожидание выигрыша играет важную роль при определении цены лотерейного билета, а математическое ожидание страховой выплаты — при определении цены страхового полиса.



Вопросы

1. Что такое математическое ожидание случайной величины?
2. Может ли какое-нибудь значение случайной величины быть положительным, а математическое ожидание этой величины — отрицательным?

3. Как связаны цена билета лотереи и математическое ожидание выигрыша?

Упражнения

1. В таблице дано распределение вероятностей случайной величины Z. Найдите математическое ожидание этой величины.

а)

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{3}$

б)

Значение	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Вероятность	0,07	0,1	0,13	0,18	0,04	0,14	0,19	0,12	0,03

в)

Значение	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Вероятность	0,02	0,03	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,03	0,02

2. Случайная величина A принимает все целые значения от -15 до 15 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

3. Случайная величина Z принимает все четные целые значения от -8 до 8 с равными вероятностями. Найдите ее математическое ожидание.

4. Бросаем симметричную монету один раз. Случайная величина X — «число выпавших орлов». Ясно, что X может принимать только два значения 0 и 1. Найдите $\mathrm{E}(X)$.

5. Найдите математическое ожидание случайной величины Y, которая равна сумме очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости.

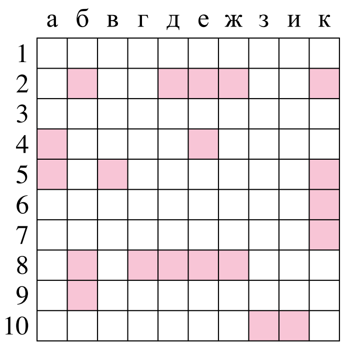


Рис. 1

6. Могут ли все значения случайной величины быть положительными, а ее математическое ожидание отрицательным?

7. Докажите, что математическое ожидание случайной величины не больше, чем наибольшее значение этой случайной величины.

8. Может ли математическое ожидание случайной величины быть меньше всех значений этой случайной величины? Ответ обоснуйте.

9. По правилам морского боя на поле 10×10 клеток размещаются четыре однопалубных корабля (по одной клетке), три двухпалубных, два трехпалубных и один четырехпалубный (рис. 1).